

EQ. DIF:

TD N°6 : EQUAT. DIFFÉRENTIELLES

Equations différentielle du

1er ordre :

Exercice 21:

⇒ E est un espace vectoriel muni d'une base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

↳ l'endomorphisme f de E est défini par les images des vecteurs de la base B :

$$\rightarrow f(e_1) = e_2 + 2e_3$$

$$\rightarrow f(e_2) = 2e_2 + 4e_3$$

$$\rightarrow f(e_3) = 4e_1 + e_2 - 2e_3$$

1) ↳ On cherche à déterminer A , la matrice représentant l'endomorphisme f par rapport à la base B

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2) ↳ Dans le but de diagonaliser A , on cherche le polynôme caractéristique de f .

$$\rightarrow P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) \\ = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda((2-\lambda) \times (-2-\lambda) - 4) + 4(4 - 2(2-\lambda))$$

$$= -\lambda(-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4) + 4(4 - 4 + 2\lambda)$$

$$= 8\lambda - \lambda^3 + 8\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 16)$$

$$= -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)$$

→ on obtient 3 valeurs propres distinctes

$$\ast \lambda = 0$$

$$\ast \lambda = 4$$

$$\ast \lambda = -4$$

⇒ comme le polynôme est de degré 3 et possède 3 valeurs propres distinctes de multiplicité 1.

⚠ Remarque Si $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \lambda$

↳ alors, on a 2 valeurs propres : $\lambda = 2$ (de multiplicité 2) et $\lambda = 0$

↳ Pour savoir si la matrice est diagonalisable on cherche la dimension du vecteur propre correspondant à la valeur propre 2.

1) si $\dim(E_{\lambda=2}) = 1$, A non diagonalisable

2) si $\dim(E_{\lambda=2}) = 2$, A diagonalisable

3) ↳ A est donc diagonalisable, on obtient :

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

↳ avec v_1 = vecteur propre associé à $\lambda = 0$

v_2 = " $\lambda = 4$

v_3 = " $\lambda = -4$

4) ↳ Un vecteur propre associé à $\lambda = 0$ est calculable après résolution d'un système :

⇒ $E_{\lambda=0} = \{X = (x, y, z) \text{ t.q. } AX = \lambda X = 0\}$, on cherche tous les vecteurs X de $\mathbb{R}^3$ tel que $AX = 0$ avec $X = (x, y, z)$

$$\Rightarrow (A - 0I)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 6y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -2y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{on a donc } E_{\lambda=0} = \{(-2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{donc } \dim(E_{\lambda=0}) = 1$$

on note les 2^e valeurs propres $\lambda_2 = 6$ et on cherche tous les vecteurs X de $\mathbb{R}^3$ tel que $AX = 6X$ avec $X = (x, y, z)$

$$\Rightarrow (A - 6I)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x + 6z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 6y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ 2y = 2z \\ 2y = -2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{on a donc } E_{\lambda=6} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{donc } \dim(E_{\lambda=6}) = 1$$

→ on note $\lambda_3 = -4$ et on cherche tous les vecteurs X de $\mathbb{R}^3$ tels que $AX = -4X$ avec $X = (x, y, z)$

$$\Rightarrow (A + 4I)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ x + 6y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{on a donc } E_{\lambda_3 = -4} = \{(-z; 0, z), z \in \mathbb{R}\} \\ = \text{vect} \{(-1, 0, 1)\}$$

$$\Rightarrow \text{donc } \dim(E_{\lambda_3 = -4}) = 1$$

↳ On peut donc en déduire la matrice P

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \rightarrow \text{matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base.}$$

$$* v_1 = (-2, 1, 0) \text{ pour } \lambda = 0$$

$$* v_2 = (1, 1, 1) \text{ pour } \lambda = 4$$

$$* v_3 = (1, 0, -1) \text{ pour } \lambda = -4$$

5) ⚠ Rappel:

$$A = P D P^{-1}$$

$$AP = P D P^{-1} P$$

$$AP = P D$$

$$P^{-1}AP = D$$

6) $\hookrightarrow$ On a $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t(\text{cof } P)$

$\hookrightarrow$ avec $\text{cof } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\swarrow + (1 \times 1) - (0 \times 1)$

$\hookrightarrow \det P = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
 $= 1 - (-3) = 4$

$\hookrightarrow \frac{1}{\det P} = \frac{1}{4}$ $\swarrow$ les lignes deviennent les colonnes pr t

$\hookrightarrow P^{-1} = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$

7) $\hookrightarrow$ Comme D est une matrice diagonale, on a
 $\hookrightarrow D^7 = \begin{pmatrix} 0^7 & 0 & 0 \\ 0 & 4^7 & 0 \\ 0 & 0 & -4^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16384 & 0 \\ 0 & 0 & -16384 \end{pmatrix}$

8) $\hookrightarrow$ Il est possible de déterminer A^7 en n'effectuant que deux multiplications de matrice :

$\hookrightarrow$ en effet, $A = P D P^{-1}$

$\hookrightarrow$ donc $A^n = \underbrace{P D P^{-1}}_I \times \underbrace{P D P^{-1}}_I \times \dots \times \underbrace{P D P^{-1}}_I \times \underbrace{P D P^{-1}}_I$

$A^n = P D^n P^{-1}$

$\hookrightarrow$ donc $A^7 = P D^7 P^{-1}$

$\hookrightarrow$ On résoud le calcul $A^7 = P D^7 P^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow A^T &= \dots \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & h^T & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -h^T \end{array} \right) P^{-1} \\
 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & h^T & -h^T & -1 & 2 & -1 \\ 0 & h^T & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & h^T & -h^T & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \\
 &= 1/h \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -2 \times h^T \\ h^T & 2 \times h^T & h^T \\ 0 & 0 & -2 \times h^T \end{array} \right)
 \end{aligned}$$